

La modélisation de la dynamique de la volatilité à l'aide de données de haute fréquence

Gregory H. Bauer*

La matrice des covariances entre les rendements est l'objet de l'intérêt d'un large éventail d'intervenants¹. Les chercheurs y ont recours pour vérifier la validité de différentes théories de l'évaluation des actifs financiers, et les gestionnaires de portefeuille pour concevoir des stratégies permettant de calquer fidèlement le rendement d'un portefeuille de référence. Les gestionnaires de risques, quant à eux, se servent de cette matrice dans la construction de mesures comme la « valeur exposée au risque » (VaR). Les dirigeants d'entreprise, enfin, ont besoin de mesures précises des covariances pour formuler leurs stratégies de couverture.

Les banques centrales s'intéressent aussi beaucoup au concept de matrice des covariances. Toute évaluation de la stabilité des marchés financiers et de la contagion entre ceux-ci est tributaire de la mesure des variances et covariances variables dans le temps qui composent la matrice. Des recherches ont ainsi montré que la covariation des places boursières internationales est plus forte en période de recul des marchés (voir, par exemple, Connolly et Wang, 2003; Ribeiro et Veronesi, 2002). La question de savoir s'il s'agit là d'une réaction rationnelle à la conjoncture économique du moment ou de la conséquence d'une « contagion » irrationnelle demeure ouverte.

La variabilité dans le temps des variances et des covariances entre les rendements est un fait stylisé bien établi de la finance appliquée². Les banques centrales, entre autres acteurs, ont donc besoin d'un modèle de la matrice des covariances varia-

bles dans le temps ou « conditionnelles »³. Diverses méthodes d'estimation de cette matrice ont été proposées au fil des ans dans la littérature, mais comme la vraie volatilité d'un actif n'est pas observable, les chercheurs doivent traiter les éléments de la matrice des covariances comme des processus non observés ou « latents », ce qui complique grandement la modélisation de la matrice. En effet, si la matrice réelle était observable, les causes des variations dans le temps de la volatilité des marchés financiers et des corrélations entre ceux-ci pourraient être cernées avec plus de précision.

La volatilité réalisée

Le concept de « volatilité réalisée » a été élaboré récemment afin de permettre une meilleure estimation de la volatilité d'un actif ou d'un indice. À chaque seconde au cours d'une journée, les actions et les obligations font l'objet de transactions. Ces transactions peuvent être consignées et regroupées pour fournir une mesure relativement précise de la volatilité quotidienne d'un actif en particulier. La volatilité ainsi calculée n'est pas latente, mais observée, d'où l'amélioration de la qualité des prévisions⁴. Bien que la plupart des études se soient limitées à l'évaluation de la volatilité d'un seul actif, il serait intéressant de voir si le recours à la « volatilité réalisée » peut déboucher

1. La *covariance* mesure la variation dans le temps du prix d'un actif par rapport à celui d'un autre actif. La *matrice de covariance* est un concept mathématique qui mesure le degré de covariation des prix de plusieurs actifs au fil du temps. Elle est composée des variances des prix des actifs et des covariances entre eux.

2. Pour une revue exhaustive des travaux sur la modélisation et la prévision de la volatilité, voir Andersen et coll. (2005).

* Le présent article est la synthèse d'une étude de Bauer et Vorkink (2006).

3. On dit des covariances qu'elles sont « conditionnelles » parce que les acteurs des marchés établissent leurs prévisions optimales à partir des informations les plus récentes dont ils disposent.

4. Andersen et Bollerslev (1998) ont été les premiers à proposer que l'on se serve des données de haute fréquence pour estimer la volatilité réalisée quotidienne d'un actif. Andersen et coll. (2003) ont formalisé le concept de volatilité réalisée qui avait été appliqué aux marchés boursiers par Andersen, Bollerslev, Diebold et Ebens (2001) et aux taux de change par Andersen, Bollerslev, Diebold et Labys (2001). L'estimation des volatilités réalisées demande beaucoup de soin en raison des caractéristiques inhérentes aux transactions des investisseurs institutionnels qui sont contenues dans les données de haute fréquence.

sur une meilleure estimation de la matrice complète des covariances conditionnelles.

Dans l'étude qui est résumée ici, Gregory Bauer (Banque du Canada) et Keith Vorkink (Massachusetts Institute of Technology) présentent un nouveau modèle de la matrice des covariances conditionnelles. Tout au long de la journée, des données de haute fréquence sont recueillies pour un certain nombre d'actions. Une fois agrégées, ces données peuvent être combinées pour produire une estimation de la matrice quotidienne des covariances conditionnelles. Cette méthode permet de considérer les variances et les covariances des actifs en question comme observées et d'obtenir par conséquent des estimations plus précises des facteurs influant sur la matrice des covariances conditionnelles.

Bauer et Vorkink appliquent leur méthode aux actions d'un groupe d'entreprises américaines ventilées selon leur capitalisation boursière. D'autres auteurs avant eux avaient déjà examiné la volatilité du prix des actifs d'un éventail de petites et de grandes sociétés⁵, mais en cherchant à mesurer les variations dans le temps des covariances au moyen de modèles qui reposaient sur la volatilité latente. Bauer et Vorkink emploient plutôt des données de haute fréquence pour élaborer des mesures quotidiennes de la matrice des covariances réalisées des rendements d'actions de petites et de grandes entreprises sur la période allant de 1988 à 2002. Leurs mesures de la volatilité sont plus précises que celles calculées dans les travaux antérieurs et autorisent une analyse plus approfondie des facteurs à l'origine des variations des covariances conditionnelles.

Une fois obtenue la matrice des variances et des covariances réalisées, les auteurs font appel à un nouveau modèle factoriel pour représenter sa dynamique⁶. Les facteurs sont des fonctions de la volatilité passée et d'autres variables pouvant aider à prévoir la volatilité future. Bauer et Vorkink examinent ensuite un certain nombre de jeux possibles de variables, tirées de la littérature financière, afin d'évaluer leur capacité à générer la matrice des covariances. Les auteurs font remarquer que, si maints chercheurs se sont penchés sur la capacité de diverses variables à prédire les rendements boursiers, beaucoup moins ont

étudié leur capacité à prévoir la volatilité de ces derniers⁷.

Les résultats

Bauer et Vorkink évaluent leur modèle de la matrice quotidienne des covariances conditionnelles par deux moyens. Ils effectuent d'abord une série de tests statistiques standard. Ils arrivent à la conclusion que le modèle factoriel parvient assez bien à décrire les variations quotidiennes de la matrice des covariances. Contre toute attente, ils n'observent pas beaucoup de différence entre les diverses variables prédictives utilisées pour construire les facteurs : aucun jeu de variables ne semble l'emporter sur un autre aux fins de la prévision de la matrice des covariances. La raison en est qu'un facteur exerce une influence prépondérante sur la volatilité des prix de toutes les actions, peu importe la taille de l'entreprise : si le marché est volatil un jour donné, les prix de toutes les actions sont volatils ce même jour. Dans la mesure où les variables prédictives rendent compte de la dynamique de la volatilité globale du marché, elles arrivent aussi à représenter celle des actions individuelles.

La deuxième méthode d'évaluation — et la plus concluante — consiste à examiner dans quelle mesure le modèle permet de constituer des portefeuilles optimaux, notamment un portefeuille de réplication quotidien⁸. Les auteurs modélisent la matrice des covariances d'actions classées selon la taille de l'entreprise et construisent des indices pour suivre l'évolution d'un portefeuille composé d'actions « de valeur » (actions dont le ratio valeur comptable/cours est élevé). Les auteurs constatent que l'ajout de la volatilité passée et de variables servant à prédire les rendements boursiers (comme le ratio dividendes/cours) aboutit à des porte-

5. Voir Conrad, Gultekin et Kaul (1991), Kroner et Ng (1998), Chan, Karceski et Lakonishok (1999), ainsi que Moskowitz (2003).

6. Dans un modèle factoriel, les variances et les covariances d'un grand nombre d'actifs sont expliquées par un petit nombre de variables.

7. Par exemple, certaines études montrent que le ratio dividendes/cours d'un indice boursier peut aider à prévoir le rendement moyen de l'indice, mais on ne sait pas s'il peut servir à prédire la volatilité de ses rendements.

8. Portefeuille composé d'un petit nombre d'actifs à l'aide duquel le gestionnaire cherche à calquer le plus fidèlement possible le rendement d'un portefeuille cible. Le but est de minimiser l'écart entre le rendement du portefeuille de réplication et celui du portefeuille cible. Par exemple, le gestionnaire peut combiner un certain nombre d'actions et de produits dérivés pour reproduire la performance d'un indice portant sur l'ensemble du marché boursier, comme l'indice composite TSX. Le fait de limiter les transactions à l'échange de quelques actifs pour tenter de calquer le rendement d'un grand nombre d'actions permet de réduire grandement les coûts de transaction. Comme le test effectué sur le portefeuille de réplication est fondé sur les écarts entre la volatilité de ce dernier et celle du portefeuille cible, il est moins sensible aux variations de la volatilité globale du marché qui touchent les deux portefeuilles.

feuilles de réplication plus performants. En d'autres termes, les variables qui aident à prévoir les rendements sur les marchés aident également à prédire les risques (c.-à-d. la volatilité).

Les auteurs comptent user de leur méthode pour explorer la variabilité dans le temps des relations qui existent dans d'autres marchés d'actifs et pour déterminer la capacité de diverses variables à prédire les fluctuations importantes des cours des marchés. Le modèle peut aussi servir à étudier les covariances entre des actifs internationaux dans le but de clarifier la façon dont les chocs se propagent d'un pays à l'autre, surtout en période de fortes tensions sur les marchés.

Bibliographie

- Andersen, T. G., et T. Bollerslev (1998). « Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts », *International Economic Review*, vol. 39, n° 4, p. 885-905.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, P. F. Christoffersen et F. X. Diebold (2005). « Volatility Forecasting », document de travail n° 11188, National Bureau of Economic Research.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold et H. Ebens (2001). « The Distribution of Realized Stock Return Volatility », *Journal of Financial Economics*, vol. 61, n° 1, p. 43-76.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold et P. Labys (2001). « The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 96, n° 453, p. 42-55.
- (2003). « Modeling and Forecasting Realized Volatility », *Econometrica*, vol. 71, n° 2, p. 579-625.
- Bauer, G. H., et K. Vorkink (2006). « Multivariate Realized Stock Market Volatility », polycopié, Banque du Canada.
- Chan, L. K. C., J. Karceski et J. Lakonishok (1999). « On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model », *Review of Financial Studies*, vol. 12, n° 5, p. 937-974.
- Connolly, R. A., et F. A. Wang (2003). « International Equity Market Co-Movements: Economic Fundamentals or Contagion? », *Pacific Basin Finance Journal*, vol. 11, n° 1, p. 23-43.
- Conrad, J., M. N. Gultekin et G. Kaul (1991). « Asymmetric Predictability of Conditional Variances », *Review of Financial Studies*, vol. 4, n° 4, p. 597-622.
- Kroner, K. F., et V. K. Ng (1998). « Modeling Asymmetric Comovements of Asset Returns », *Review of Financial Studies*, vol. 11, n° 4, p. 817-844.
- Moskowitz, T. J. (2003). « An Analysis of Covariance Risk and Pricing Anomalies », *Review of Financial Studies*, vol. 16, n° 2, p. 417-457.
- Ribeiro, R., et P. Veronesi (2002). « The Excess Comovement of International Stock Markets in Bad Times: A Rational Expectations Equilibrium Model », document de travail, Graduate School of Business, Université de Chicago.